Evaluación del pensamiento aditivo en los primeros grados de primaria

Martha Alejandra Montoya Forero
Martha Lucia Pardo Salcedo
Rocío del Pilar Rodríguez Cabezas
Sonia Rocío Jaimes Jaimes
Luis Alexander Castro Miguez*

Introducción

Este artículo es resultado de la investigación desarrollada con el apoyo del IDEP en el marco del proyecto *Evaluación como Investigación: una Propuesta de Experimentación en el Aula,* es una experiencia sobre la evaluación del pensamiento aditivo con niños de los grados segundo y tercero relacionados con su capacidad para resolver algún tipo particular de problemas aditivos. El estudio aporta en la solución de un problema, que al parecer es de alta importancia en la evaluación durante el proceso de enseñanza: ofrecer a los maestros instrumentos que permitan recoger información, de forma sistemática, para dar cuenta de las elaboraciones alcanzadas por sus estudiantes.

Las pruebas escritas que el profesor aplica a sus alumnos, aunque son una fuente importante de información para conocer el logro de los estudiantes, la gran mayoría de las veces son insuficientes, ya que no recogen información de forma sistemática, por lo que dejan muchos vacíos al conocer la actuación de

* Docentes de educación básica primaria del Colegio Fe y Alegría La Paz Palermo, localidad 18 (Rafael Uribe Uribe) y San Ignacio IED en la localidad 6 (Bosa).

los estudiantes. Aunque en muchos casos los maestros complementan esta información con la observación y análisis de las diferentes producciones que los niños hacen a lo largo del proceso de enseñanza –y dicha información es valiosa pues cumple un papel fundamental en la evaluación de los estudiantes– muchas veces también es insuficiente, en gran medida porque el alto número de alumnos por curso reduce a mínimos extremos la interacción cara a cara, de forma que el maestro no se obtiene una apreciación adecuada de todos los estudiantes, especialmente de aquellos que se encuentran en el segmento medio del grupo.

Es común afirmar que el acto de evaluar no puede reducirse a calificar, sin embargo en la práctica misma parece que esta afirmación no es más que una verbalización hueca. A pesar de los cambios aparentes, la evaluación sigue teniendo mucho de un proceso reducido a la calificación. Actualmente en la gran mayoría de los casos no se usan escalas numéricas sino escalas basadas en letras, pero no significa que se haga evaluación cualitativa. Quizás ahora se hace más evaluación a lo largo del proceso y no se deja todo para el final; sin embargo cuando se constata que estos actos tienen más la intención de recoger unas calificaciones parciales, para luego promediarlas y obtener una calificación final. Hoy por hoy quedan muchas dudas sobre la idea de la *evaluación formativa* que se maneja.

Avanzar en la dirección de superar la evaluación como simple calificación supone del maestro la reflexión no sólo sobre lo que evalúa sino sobre *cómo* lo hace, sobre los procedimientos que sigue y las herramientas que dispone. Los resultados de este estudio exponen la importancia de fortalecer –tanto como sea posible– la forma de conocer las construcciones de los estudiantes, la necesidad de prestar atención a los procedimientos que ellos siguen y no quedarse únicamente en los resultados y en la utilización exclusiva de pruebas escritas. Como ya se mencionó, se utilizan instrumentos suficientemente estructurados, pero siendo conscientes de las limitaciones que ellos tienen y de la necesidad de completar el conocimiento de los estudiantes con otras fuentes, la observación a lo largo del proceso de enseñanza por parte del profesor y las entrevistas (Castaño,1997).

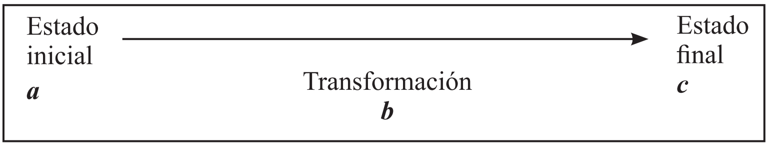
Referentes conceptuales

Un problema aritmético conlleva una *estructura aditiva* si para su solución se requiere del uso de una adición o sustracción. Se dirá que es *simple* cuando se resuelve con una sola operación aritmética y *compuesto* cuando se resuelve empleando la combinación de estas operaciones básicas.

Diferentes autores han propuesto posibles clasificaciones para los problemas de adición y sustracción desde Gibb (1954, 1956), Lunzer et. al (1976), Carpenter & Moser (1979) Brown (1981), Nesher (1982) y Vergnaud (1982, 1991, 1997). Este trabajo toma como referencia la tipología de problemas propuesta por Vergnaud (1991). Él distingue seis categorías para clasificar los problemas aditivos. Una de ellas es la de *transformación de medidas* que es la relación "dinámica" que permite la transformación –cuantificada– de una medida inicial[1] en una medida final. Se pueden identificar seis tipos de problemas, según si la *transformación* ***b*** sea positiva (aumento) o negativa (disminución) y según si la pregunta se refiera al estado final ***c*** (conociéndose ***a*** y ***b*****),** a la *transformación* ***b*** (conociéndose ***a*** y ***c*****),** o al estado inicial ***a*** (conociéndose ***b*** y ***c***)[2]**.**

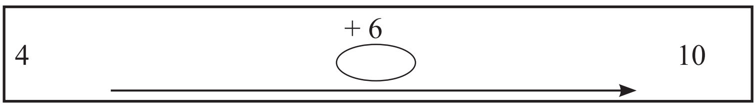
La estructura de este tipo de problemas se puede representar mediante la siguiente figura:

Figura 1. Estructura de transformación



Por ejemplo: "Seis personas suben a un autobús. Había cuatro personas. Ahora hay diez".

Figura 2. Estructura aditiva



La tabla 1 ilustra los seis tipos de problemas propuestos por Vergnaud (1991).

Tabla 1. Tipos de problemas de transformación de medidas

Una transformación actúa sobre una medida para dar lugar a una medida			
Esquema sagital	**Subcategorías**	**Tipo de problemas**	
a —(b)→ c a: Medida (estado inicial) b: Transformación c: Medida (estado final)	Subcategoría I	b: Positiva	c: desconocida
		b: Negativa	
	Subcategoría II	b: Positiva	b: desconocida
		b: Negativa	
	Subcategoría III	b: Positiva	a: desconocida
		b: Negativa	

1 Se refiere a aquel número que se le asigna a un objeto o colección para decir que es su *medida*. Por ejemplo, en el siguiente problema: Juan tiene 5 canicas, su papá le regala 3, ¿cuántas canicas completa Juan?, la medida inicial es "5", la cual se asigna a la colección de canicas.

2 Para ampliar *véase* Castaño, 1997.

Siguiendo a Castaño & Forero (1997), hay tres aspectos que afectan la mayor o menor complejidad de un problema, *su demanda lógica* que hace referencia a la estructura formal del problema –a su tipo y número de coordinaciones que exige el problema para ser resuelto–. Cuando los problemas son de tipo aditivo exigen coordinaciones de *parte y todo.* Si los problemas exigen establecer relaciones en el mismo sentido en que se da una acción –problemas directos–, resultan más fáciles que aquellos en los que las relaciones que demanda, son en sentido inverso al orden en que se representa la acción –problemas inversos); de forma semejante, si un problema es compuesto la exigencia es de mayor complejidad que uno simple del mismo tipo. *Su contenido* relacionado con la situación que evoca el problema –puede ser una situación de compra-venta, de cosecha, de taller...–. Entre menos familiar o abstracto sea el contenido, es decir, entre menos referencia haga a una situación conocida, practicada por el sujeto, más difícil será su comprensión.

El tercer aspecto que define la complejidad de un problema es *su formulación lingüística* que implica la estructura de la enunciación, puesto que aquellas formulaciones que se presentan en órdenes distintas a como se ejecuta la acción pueden resultar más complejas que aquellas que mantienen un orden igual a la acción. En este sentido puede importar el sitio en que aparece enunciada la pregunta –al final, al comienzo o en el intermedio–. Aquellas formulaciones más abstractas generalmente comportan mayor complejidad que las formulaciones del mismo problema porque evocan más fielmente la acción que ellas suponen.

De ahí que al explorar la capacidad de los niños para comprender y resolver problemas aditivos de transformación de medidas no basta controlar los seis tipos según su estructura, sino también los tres factores que determinan la complejidad de un problema.

Problema y metodología

Este trabajo pretende identificar la forma cómo los estudiantes de los grados segundo y tercero resuelven problemas aditivos de transformación de medidas, con el fin de elaborar unos indicadores de *evaluación* que permitan caracterizar y valorar los desempeños de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de este tipo. Resolver estas dos preguntas, circunscritas a este tipo de problemas, no agota lo relativo al pensamiento aditivo en estos grados, pero no por esto este trabajo pierde importancia. Los aportes que se hagan brindan información útil al maestro para ampliar y profundizar el conocimiento sobre el pensamiento de los niños.

Para ofrecer una respuesta a estas preguntas, se aplicó un instrumento de *evaluación* ya existente[3] a unos 160 niños dos grupos de segundo y dos de tercero, en

3 Instrumento elaborado por Luis Castro, en el marco de su investigación para optar el título de Magíster en Docencia de la Matemática, en el que se hace un esfuerzo por tipificar los problemas propuestos de acuerdo con algunos componentes –orden la información, contexto y lugar de la pregunta–.

los que las profesoras responsables de este trabajo dictaban su clase. En ambos grados se aplicó el mismo instrumento, pero en el grado segundo los problemas se formularon en un rango numérico (0 a 99) distinto al de tercero (0 a 9.999)[4]. El instrumento se compone de 24 problemas de enunciado, organizados en tres grupos de doce problemas cada uno. Cada grupo es la formulación de los seis tipos de problemas de transformación de medida anteriormente descrito. Un grupo respondía al *orden de la información,* si estaba igual o distinto al orden de la acción; otro grupo tenía que ver con el *contexto,* si es familiar o poco familiar y finalmente el *lugar de la pregunta,* ya sea al inicio o al final. Cada niño resolvió por escrito y de forma individual los problemas, en dos sesiones de casi 90 minutos cada una.

Los datos obtenidos se procesaron y analizaron en dos niveles diferentes. Uno más cuantitativo para establecer el grado de acierto de los estudiantes frente a un problema, con el fin de identificar cuáles problemas resultaban más difíciles a los niños y contrastarlo con el modelo de complejidad que se había elaborado. Se asume como tendencia general que si un niño comprende correctamente un problema de complejidad mayor comprenderá correctamente el de orden inferior, razón por la que estadísticamente se encontrará que el número de aciertos de una población disminuirá a medida que se avance en el grado de complejidad de un problema.

Sin embargo, esta jerarquía no es tan simple de establecer, 1) porque, como ya se dijo, la complejidad de un problema depende de los tres factores –demanda lógica, formulación lingüística y contenido– y 2) cuando los niños no comprenden un problema con frecuencia producen respuesta falsas[5] que alteran notablemente los resultados. Precisamente por esto –y aquí está el segundo nivel de análisis, que es más cualitativo– la información recogida mediante el instrumento se complementó con entrevistas a algunos niños en las que se buscaba conocer detalladamente las justificaciones que daban a los procedimientos que seguían, además de la observación de las producciones de los niños a lo largo del proceso de enseñanza.

Análisis de los resultados obtenidos

Siguiendo a Castaño & Forero (1997), al solucionar un problema aditivo se pueden distinguir dos procesos que, aunque íntimamente ligados, son distintos. Uno hace referencia a la forma como el niño se lo representa en la mente y el

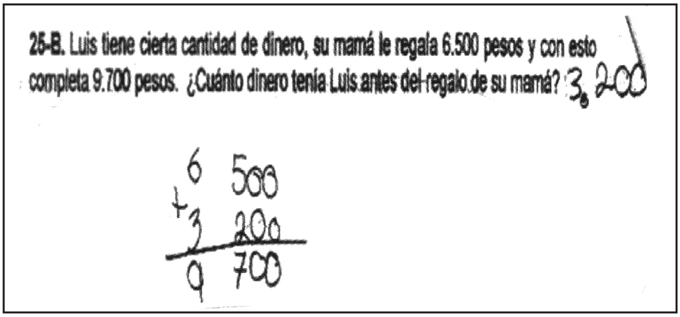
4 Al formular los problemas se buscó que las cantidades fueran redondas para simplificar tanto como fuera posible los cálculos. Esto facilitó prestar más atención a la forma como los niños comprenden, se representan mentalmente los problemas y no a la habilidad para calcular operaciones.

5 Respuestas correctas obtenidas por un razonamiento incorrecto.

otro al procedimiento que sigue para hacer las cuentas. Un ejemplo que ilustra lo anterior lo encontramos en este trabajo en el siguiente problema:

> Luis tiene cierta cantidad de dinero, su mamá le regala 6.500 pesos y con esto completa 9.700 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Luis antes del regalo de su mamá?

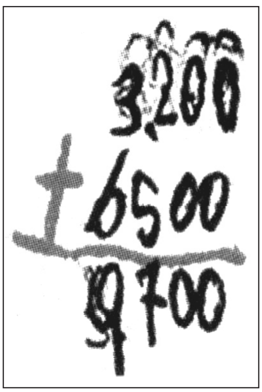
Figura 3. Manuscrito de operación de adición



Los niños se lo pueden representar de formas distintas y a su vez seguir procedimientos diferentes.

Algunos estudiantes que logran resolverlo, lo hacen a partir del estado inicial hipotético, que consiste en plantear la hipótesis de un cierto estado inicial; aplicarle la transformación directa (6.500), encontrar un estado final (9.700) y corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido, de ahí que en la figura 4 se observen rastros de borrar y corregir.

Figura 4. Manuscrito de la operación de adición

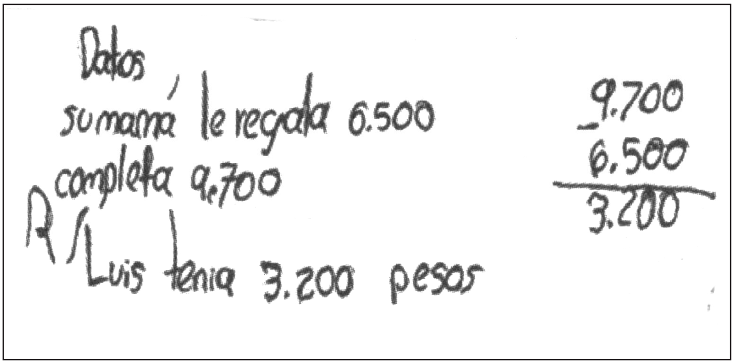


Por otro lado, en algunas entrevistas que se hicieron se pudo observar que algunos estudiantes cuentan a partir de 6.500 hasta llegar a 9.700, un caso en particular es la siguiente respuesta *"[...] 500 para 7.000, 8.000, 9.000, irían 2.500, entonces Luis tenia 3.200"*.

Aunque estos niños siguen procedimientos distintos, se representan el problema de una misma forma ya que lo hacen como un complemento a derecha: *6.500 + ? = 9.700*

Otros niños se representan este mismo problema como una situación de separación (de la totalidad *9.700* se quita *6.500,* así: *9.700 - 6.500 = ?),* siguiendo procedimientos distintos para encontrar lo que queda. Un ejemplo se observa en la imagen de la sustracción.

Figura 5. Manuscrito de la operación de sustracción



Estas diferencias de representación obedecen a varios factores como la mayor o menor familiarización que el niño tenga con el contenido del problema, la formulación lingüística y sobre todo, el nivel de organización del pensamiento que tenga el niño. Los ejemplos antes citados ilustran que, aunque el problema fue formulado como un complemento a izquierda *(? + 6.500 = 9.700),* los niños hacen *transformaciones lógicas*, porque han logrado niveles de organización de su pensamiento aditivo que los hace capaces de reconocer la equivalencia lógica entre cualquier par de las siguientes ecuaciones:

? + 6.500 = 9.700
6.500 + ? = 9.700
9.700 - 6.500 = ?

En ocasiones el docente quiere que el problema sea resuelto por un camino especial y si bien es cierto que hay estrategias más elaboradas y eficaces que otras a la luz de las *estructuras aditivas,* estas formas de aprendizaje son igualmente válidas en el proceso del estudiante, por tanto no hay que excluirlas. Lo importante de reconocerlas como conocimiento del estudiante es que implica una reflexión frente a qué herramientas se deben facilitar a los estudiantes para que ese conocimiento trascienda a relaciones más elaboradas como la de *reversibilidad*.

Es importante destacar al respecto, y a la luz de la evaluación, cuántos de nuestros estudiantes en sus procedimientos están dando respuesta a lo solicitado, pero por el afán de *calificar*, se desconocen y se pierde la posibilidad de aprendizaje a partir de los mismos.

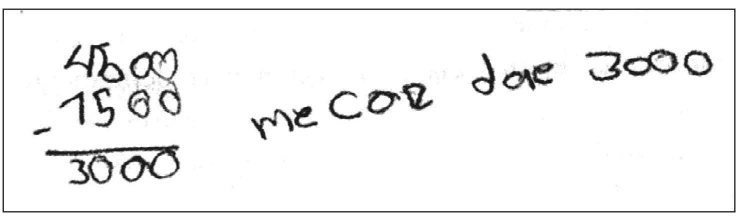
Existen otros aspectos que permiten evidenciar dificultades no sólo con la comprensión en la solución de problemas aditivos, sino con el manejo de la lógica del sistema decimal de numeración. Aspecto que implica un trabajo previo o paralelo a la solución de los mismos. Un ejemplo se ilustra en la figura 6.

Figura 6. Manuscrito de operación de sistema decimal

Por otra parte, se tienen algunos casos en donde se cometen errores que permiten obtener respuestas correctas. Un ejemplo al respecto es la solución que plantea un estudiante al siguiente problema:

> Jorge tenía 4.500 pesos, le regalaron cierta cantidad y completó 7.500 pesos. ¿Cuánto dinero le regalaron?

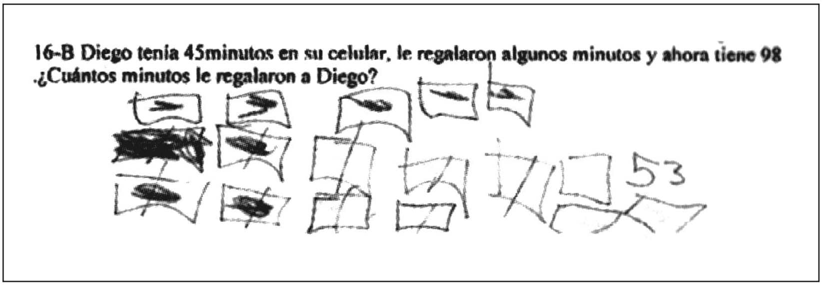
Figura 7. Manuscrito de operación de sustracción



El niño da como respuesta a este problema 3.000. Si solamente se tiene en cuenta este resultado numérico, se diría que está correcto, pero al observar la operación y los números que emplea se ve que el estudiante confundió el 7.500 con un 1.500, y que al restar este valor de 4.500, efectivamente da 3.000. Hay que tener cuidado con este tipo de procedimientos ya que en varias ocasiones puede suceder esto y podría validarse un conocimiento no construido.

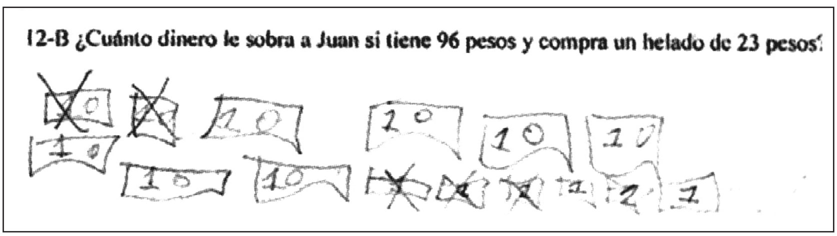
Finalmente, se pueden encontrar procedimientos en los cuales no se evidencia el uso de una operación en particular, pero sí se refleja un análisis del problema que se quiere resolver. En algunos casos se emplean representaciones simbólicas realizando agrupaciones en las cuales utilizaron fichas de colores amarillas y rojas con un valor de 1 y 10 respectivamente.

Figura 8. Manuscrito de operación de representación simbólica



Otros niños representan las cantidades utilizando billetes con denominaciones de 10 y 1, como se aprecia en la figura 9:

Figura 9. Manuscrito de operación de representación simbólica



La experiencia de realizar un análisis pormenorizado de problemas aditivos de transformación y del desempeño de los estudiantes en dichos problemas, es una clara invitación a la permanente reflexión sobre todos los factores que intervienen en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la *estructura aditiva.* Son relevantes tanto la evidencia de la complejidad con la que se debe asumir la labor docente para garantizar un real aprendizaje de los estudiantes, como el punto de partida para intervenir el currículo y encauzar de la mejor manera la enseñanza de las *estructuras aditivas.*

Por otra parte, es importante reflexionar sobre los indicadores que permitieron caracterizar el desempeño de los estudiantes. Se esperaba que el número de estudiantes que resolvieron el problema del Nivel A[6] fuera mayor que los que resolvieron los problemas del Nivel B[7], lo cual se cumplió en todos los casos. Aunque se presumía que el número de estudiantes que resuelven cada uno de los problemas de Nivel B fuera mayor que los que resuelven los del Nivel C[8] no se cumplió plenamente, puesto que en todos los casos el número de estudiantes que respondió de manera correcta el problema del Nivel C aumentó comparado con el número de estudiantes que resolvió al menos uno de los problemas del Nivel B.

Una posible explicación con respecto a lo sucedido, tiene que ver con el procedimiento que se puede emplear para resolver los problemas del Nivel C, correspondiente al algoritmo de la suma. Varios estudiantes emplearon este recurso sin tener claridad de lo que estaban resolviendo; esto se pudo ratificar en las entrevistas que se hicieron a algunos estudiantes. La mayoría de ellos no dio un argumento convincente frente al problema porque empleaba esta operación –algoritmo de la suma– como medio para solucionarlo; incluso uno de ellos dijo: *"—Como la gran mayoría de problemas se resolvió con suma, aquí hice también una suma"* o simplemente respondían: *"—Porque sí"*.

Conclusiones, recomendaciones y sugerencias

En relación con la primera pregunta de investigación, se considera que se logró identificar cómo resuelven los estudiantes problemas que tienen una *estructura aditiva*, particularmente aquellos en donde hay una transformación de medidas. Además se establecieron algunos indicadores de *evaluación* que permitieron caracterizar y valorar los desempeños de los estudiantes en relación con la resolución de este tipo de problemas. Sin embargo, se considera que frente a esto último, por las premuras del tiempo, faltó mayor reflexión al respecto.

El trabajo realizado permite reconocer que es necesario tener presente varios elementos al evaluar el desempeño de los estudiantes cuando resuelven

6 Resolución de problemas directos (Subcategoría I). Se tienen en cuenta los tres aspectos: orden de las informaciones, situaciones familiares y poco familiares para el sujeto y el lugar de la pregunta.

7 Resolución de problemas un poco más complejos, caracterizados por ser inversos (Subcategoría I), directos e inversos (Subcategoría II) y directos (Subcategoría III). Se tienen en cuenta los tres aspectos: orden de las informaciones, situaciones familiares y poco familiares para el sujeto y el momento de la pregunta.

8 Resolución de problemas inversos (Subcategoría III). Se tienen en cuenta los tres aspectos: orden de las informaciones, situaciones familiares y poco familiares para el sujeto y el momento de la pregunta.

problemas aditivos, y no solamente calificar si obtuvo o no la respuesta correcta. Entre éstos tenemos la clasificación de los problemas, lo cual permitirá establecer ciertos niveles de complejidad para ver qué tanto comprenden los estudiantes al enfrentarse a determinado problema, y en consecuencia, poder replantear, si es necesario, el proceso de enseñanza en relación con la *estructura aditiva*. Adicional a esto, no se pueden dejar de lado los aspectos que constituyen dificultades en los problemas, como el orden temporal de los enunciados en que se plantean los problemas, los tipos de contextos, el lugar de la pregunta en el problema, entre otros. Finalmente, se considera como elemento fundamental lograr diferenciar si el estudiante comprende o no el problema que se le plantea, si puede o no modelar en una operación en particular y da la respuesta correcta.

Por otra parte, se puede inferir que resolver un problema es mucho más que encontrar una respuesta pues el *problema* implica el reto de enfrentarse a la tarea, de comprenderlo y crear una ruta para resolverlo. Esto se convierte en un recurso metodológico para el docente, puesto que le permitirá rastrear, observar y analizar las comprensiones o producciones de los niños al resolver el tipo de problemas.

La culminación de un trabajo como el que se describe en el presente artículo debe verse como punto de partida para futuras investigaciones, pues son más las preguntas que quedan sin resolver que aquellas que se intentaron responder. Entre ellas tenemos:

- ¿Cómo validar un instrumento en términos de que dé cuenta del desempeño de los estudiantes?, y
- ¿Cómo establecer los propósitos, instrumentos y momentos que utiliza el profesor para evaluar el avance de los estudiantes en una temática determinada?

Referencias bibliográficas

Castaño, J. (1997). Hojas pedagógicas (8). Colección Matemáticas. Serie Lo Numérico. *Alegría de Enseñar*.

Castaño, J. & Forero, A. (1997). *Instrumento para la evaluación de logros en el conocimiento matemático y en la lengua escrita.* Bogotá: Corpoeducación, MEN.

Castaño, J. & Parra, J. (2007). *Resultados de las Pruebas Comprender de Matemáticas. Grados 5o y 9o. Primera aplicación. Análisis comprensivo y pedagógico.* Bogotá: Alcadía Mayor. Secretaría de Educación. Serie Cuadernos de Evaluación.

Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y modelización. Una empresa docente.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Maza, C. (1995). *Aritmética y representación.* Barcelona: Paidós.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (reimpresión). México: Trillas.